

環境物理学 II 第 15 回 電磁気の単位系の考え方

戸田 孝

電磁気の単位系には歴史的混乱がある。

この混乱に関する知識は、古い文献を読み解く場合に必要になることはもちろん、

新たな文献でも古い流儀の単位系を意図的に使う場合があるので必要になる。

この混乱は電磁気に関する諸量を数学的にどう結びつけるかという考え方の問題である。

実は、電磁気の本質と無関係な流儀の違いもあり、

同時期に主流が替わったこともあり、しばしば混同される。

そこでまず、電磁気の本質と無関係な方から述べる。

1. MKS 系と CGS 系

単位の決定は古くは権力者の権威と関連 (= 民の生活を支配) していた。

特に漢字文化圏では、

季節周期と月の朔望周期を両立させる複雑な暦を使っていたこともあり、

正しい暦を作ることは帝王のプライドであった。

暦を含め同じ度量衡を使うことが服従の証とされた。 「正朔を奉じる」

(年号も暦の重要要素)

フランス革命に至る社会情勢の中で、万人に開かれた統一単位系の整備が始まった。

ルイ 16 世 (世界史的にも珍しい理系国王) の命令で始まり革命政権にも継承された。

→メートル法 = 「自然」を基準にする単位系

1 秒 : 地球自転周期 (1 日) $\div 24 \div 60 \div 60$

1m : 地球の赤道から極までの地上距離 $\div 10^7$

1kg : 0.1m 立方の水の質量

厳密な基準は技術的都合で替わっているが本来の意味は現在でも同じである。

メートル法を定めることによって換算困難な単位が混在して混乱することは無くなったが、

メートル法では使用の便宜のために基本単位の 10 冪倍 (10 倍、100 倍、1000 倍……、1/10、

1/100、1/1000……) にも統一的な命名 (単位接頭語の命名ルール) をしており、

そのうちのどれを使うかが混乱の元になった。

実用的な単位というのはどんな大きさに決めても良いというものではなく、

どの程度にすると使いやすくなるかが経験的に判っている。

例えば、下記には 3~4 倍の違いはあるが根本的に異なる大きさではない。

cm inch 寸

m yard 尺

そして、cm とは g を、m とは kg を併用すると全体に巧く行くことが経験的に判っている。これに基づいて、

cm g sec を基本とする「CGS 系」(実験室向き)と

m kg sec を基本とする「MKS 系」(現場向き)と

が使われるようになり、各々に基づく派生単位が考え出された。

例えば、力の単位は

CGS 系 : dyn (ダイン) = g cm/sec²

MKS 系 : N (ニュートン) = kg m/sec²

エネルギーの単位は

CGS 系 : erg (エルグ) = g cm²/sec²

MKS 系 : J (ジュール) = kg m²/sec²

となる。

そもそも kg は言葉の意味としては g の 1000 倍なのに

kg の方が基本単位として扱われているという混乱がある。

当初 kg に相当するものを命名的にも基本単位にする案もあったが、

いろいろ調整の結果、命名と実態に齟齬がある状態になってしまったらしい。

歴史的には CGS でも MKS でもどちらでもない 10 冪が多く使われてきた。

例えば、圧力の単位は Pa (パスカル) = kg/m sec² だが、

古くは bar (バール) が使われてきた。

天気予報などでは現在 hPa (ヘクトパスカル) = 10²Pa が使われているが、

日本では 1992 年まで mbar (ミリバール) = 10⁻³bar が使われていた。

hPa と mbar は定義上同一である。

つまり bar = 10⁵Pa = 10⁵kg/m sec² = 10⁶g/cm sec² となって、CGS でも MKS でもない

(時々 bar を CGS だと誤って記述している文献を見かけるので注意)。

そもそもは g/cm sec² の 10 冪のうち 1 気圧に近いものを選んで bar と定義したのである。

つまり、実用上便利と考えられる 10 冪を単位ごとに選ぶべきだという考え方である。

L (リットル) = dm³ (立方デシメートル) = 10⁻³m³

a (アール) = Dm² (平方デカメートル) = 10²m²

という単位も同じような考え方で作られたものと考えられる。

しかし、この考え方は限られた分野では好都合かもしれないが、

種々の単位の相互関係を考えねばならない状況では混乱の元になる。

そこで、どんな派生単位もまず MKS で生成し、

必要があればその派生単位に 10 冪を示す単位接頭語をつけるというルールになった。

いずれにしても、CGS と MKS の違いは、本来単なる 10 冪である。

しかし、電磁気で通常 CGS や MKS と呼ばれる単位には 10 冪以外の本質的違いがある。

これは CGS から MKS への切り替えと、それとは本質的に異なる切り替えとが

ほぼ同時に行われたからであるが、

単なる 10 冪の違いに過ぎないと誤解している人も少なくないので注意が必要である。

2. 静電単位系と有理単位系

電磁気の単位は古くは Coulomb の法則を元に決められていた。

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \text{MKSA 単位系では} \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

当初は K を無次元の 1 とする単位系が使われた。つまり、

$$q_1 q_2 = F r^2$$

となり、右辺の単位は CGS だと $\text{dyn cm}^2 = \text{g cm}^3/\text{sec}^2$ となるので、

電荷の単位は $\text{g}^{\frac{1}{2}}\text{cm}^{\frac{3}{2}}/\text{sec}$ となる。

後にこの単位に stC (静電クーロン) という呼称ができ、

stA、stV、stF、stΩなども定義されたが、あまり使われない。

これらの単位を含む単位系のことを指す electrostatic unit (静電単位) を略した

「e.s.u.」を単位名として用いるのが一般的である。

意味が曖昧 (文脈によって電荷量だったり電流だったりいろいろ変わる) なので、

この用語を使っている文献を読む場合には注意を要する。

この単位系だと Maxwell 方程式や関連する「全体を見渡す」法則が 4π だらけになる。

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 (= 4\pi\rho_m)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$I = \frac{1}{4\pi} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

(変位電流が無視できる場合)

Coulomb の法則や Biot-Savart の法則の段階で 4π (球因子) を入れて

後の法則に出てこないようにすることを「有理化」という。

有理化されている単位系を有理単位系 (有理系) と呼ぶ。

Coulomb の法則を直接適用するような問題では有理化されていない方が便利であり、このことが現在でも古い単位系が使われる理由の 1 つになっている。

3. 電磁単位系と電磁相互作用

磁気についても歴史的には磁気に関する Coulomb の法則

$$F = K \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

の K を無次元の 1 とする単位系が使われてきた。

この場合、磁荷の単位は e.s.u. の電荷と同じく CGS で $\text{g}^{\frac{1}{2}}\text{cm}^{\frac{3}{2}}/\text{sec}$ になる。

歴史的理由でこの単位系を e.m.u. (electromagnetic unit : 電磁単位) と呼ぶ。

CGS 電磁単位系の磁場の強さの単位は Oe (エルステッド)、

磁束密度の単位は G (ガウス) と命名されている。

この「ガウス」は MKSA 単位系の T (テスラ) から

10^4T として定義された gauss と同じである。

そもそも、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ は、

この 2 つの「ガウス」が一致するように定義されたものである。

Biot-Savart の法則 (有理化していないもの、つまり係数は 1) と

Faraday の法則 (係数を 1 のままとする) を通して

静電単位系に基づく磁気の単位

電磁単位系に基づく電気の単位

を定義することができる。

特に後者には abC (絶対クーロン)、abA、abF、abV、ab Ω などの呼称がつけられた。

静電単位系では電気の Coulomb の法則の係数は 1 だが、

磁気の Coulomb の法則の係数は 1 にならない。

電磁単位系では電気と磁気が逆になって同じことが起こる。

例えば電磁単位系の場合の電気の Coulomb の法則の係数を

MKSA の場合の

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

に倣って

$$\frac{1}{\epsilon_{emu}}$$

とすると (有理化していないことに注意)、

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_{emu}} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}$$

となるので、MKSA 単位系の場合と同様の議論で

($\rho = 0$ 、 $\mathbf{j} = 0$ だと Maxwell 方程式に 4π が入らないことに注意)

電磁波を導く波動方程式が

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_{emu} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

などとなり、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{emu}}}$$

つまり

$$\epsilon_{emu} = \frac{1}{c^2}$$

で、Coulomb の法則は

$$F = c^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

となる。同様に静電単位系での磁気の Coulomb の法則は

$$F = c^2 \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

となる。

4. Gauss 単位系と物理単位系

静電単位系や電磁単位系では対称性が悪いので、

Biot-Savart の法則や Faraday の法則の係数を調整して

電気は静電単位系、磁気は電磁単位系で扱う方法が考え出された。

Biot-Savart の法則の係数を $\frac{1}{k}$ 、Faraday の法則の係数を $\frac{1}{k'}$ とすると、Maxwell 方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{k} \mathbf{j} + \frac{1}{k} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{k'} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

電磁波を導く波動方程式が

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{kk'} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

などとなり、 $c^2 = kk'$ となるので、 $k = k' = c$ とすれば辻褃が合う。

これを Gauss 単位系という。

(Gauss の名を冠しているのは敬意を表しているだけで、考案者ということではない)

Gauss 単位系では ϵ_0 や μ_0 が無次元の 1 となり、

真空中の議論では電場と電束密度、磁場と磁束密度を区別する必要が無くなる。

物質中では誘電率や透磁率が無次元の「真空に対する比」になる。

Gauss 単位系を有理化したもの (指定教科書 p.191 で説明されているもの) を

Heaviside-Lorentz (ヘビサイド・ローレンツ) 単位系と呼び、

それを CGS ではなく MKS としたものを MKSP 単位系 (P は physical の意) と呼ぶ。

これらでは Maxwell 方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

と、時間微分の項に $\frac{1}{c}$ が入る形になる (電流は電荷移動量の時間微分であることに注意)。

長さの単位を「光が単位時間に進む距離」とすれば、 $c=1$ になるので $\frac{1}{c}$ が消える。

この考え方は相対性理論とも相性が良いので、理論研究者がこの単位系を好んで使う。

5. 3 元系と 4 元系

Gauss 単位系やその系統の単位系 (3 元系) は理論的考察には便利だが

単位の大きさを実用的にしたり広く使われている既存の単位と整合するようになるのが難しいという問題がある。

そこで、A を MKS とは独立な単位にして「4 元系」とすることによって、

μ_0 (あるいは $\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$) の値を調整して実用上好都合な単位系としたのが

MKSA 単位系である。